FUNCIONES SIMÉTRICAS

1. Comprobar que la función $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$ es simétrica respecto del punto C (−1, 0).

Solución: Se comprueba que $f(-2-x)=-f(x)$.

2. ¿Existe alguna función que sea par e impar a la vez? Poner un ejemplo.

3. Demostrar que las siguientes funciones son pares:
    a. $f(x)=|x|$
    b. $f(x)=x^2$
    c. $f(x)=x^6+x^4+x^2$
    d. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
    e. $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$
    f. $f(x)=(|x|)^{1/2}$
    g. $f(x)=\cos x$
    h. $f(x)=\sec x$
    i. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
    j. $f(x)=\sin^2 x$
    k. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$
    l. $f(x)=\tan^2 x$

4. Demostrar que las siguientes funciones son impares:
    a. $f(x)=x$
    b. $f(x)=-x$
    c. $f(x)=x^5+x^3+x$
    d. $f(x)=x|x|$
    e. $f(x)=\dfrac{6}{x}$
    f. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$
    g. $f(x)=x|x^3|$
    h. $f(x)=\sin x$
    i. $f(x)=\tan x$
    j. $f(x)=x^3$
    k. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$
    l. $f(x)=\dfrac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$

5. Demostrar que la función polinómica $f(x)=x^3+1$ es simétrica respecto del punto C (0, 1).

Solución: Se comprueba que $f(-x)=2-f(x)$.

6. Demostrar que:
   a. El producto de dos funciones pares es otra función par.
   b. El producto de dos funciones impares es una función par.
   c. El producto de una función par por una función impar es otra función impar.

7. Demostrar que:
   a. La composición de dos funciones pares es otra función par.
   b. La composición de dos funciones impares es otra función impar.
   c. La composición de una función par con otra impar es una función par.
   d. La composición de una función impar con otra par es una función par.

8. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-1}$, hallar las asíntotas y comprobar que su intersección es centro de simetría de la función.

Solución: $x=1$, $y=x+1$, C (1, 2); se comprueba que $f(2-x)=4-f(x)$

9. Demostrar que la función polinómica $f(x)=(x-1)^3$ es simétrica respecto del punto C (1, 0).

Solución: Se comprueba que $f(2-x)=-f(x)$.

10. Demostrar que:
    a. Si una función impar es derivable en un intervalo, su derivada es una función par.
    b. Si una función par es derivable en un intervalo, su derivada es una función impar.

11. Sabiendo que la condición necesaria y suficiente para que una función polinómica $f(x)$ tenga un centro de simetría en el punto C $(a, f(a))$ es que sean nulas todas las derivadas de orden par en $x_0=a$, demostrar que toda función polinómica de tercer grado tiene por centro de simetría el punto de inflexión.

12. Hallar el centro de simetría de la función: $f(x)=x^3+1$.

Solución: C (0, 1).

13. Demostrar que en una función polinómica de tercer grado el punto máximo, el punto mínimo (si existen) y el punto de inflexión están alineados.

14. Hallar el centro de simetría de la función: $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

Solución: C (2, 0).

15. Hallar el centro de simetría de la función: $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

Solución: C (−1, 0).

16. Comprobar que en la función: $f(x)=\dfrac{x^2(a-x)}{a^2}$, $a>0$, el origen (punto mínimo), el máximo y el punto de inflexión están alineados.

Solución: m (0, 0), M$\left(\dfrac{2a}{3},\dfrac{4a}{27}\right)$, I$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{2a}{27}\right)$.

17. Hallar el centro de simetría, si existe, de la función polinómica dada por: $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$.
Solución: C (0, 1).

18. Comprobar en la función: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ que el punto máximo, el punto mínimo y el punto de inflexión están alineados, siendo éste último el centro de simetría.
Solución: M (0, 4), m (2, 0), I (1, 2).

FUNCIONES MONÓTONAS. FUNCIONES CONSTANTES

1. Demostrar que si f y g son dos funciones estrictamente crecientes en el dominio D, también lo es $f+g$.

2. Demostrar que si f es estrictamente creciente, la función opuesta $-f$ es estrictamente decreciente. ¿Qué se puede decir de la diferencia $f-g$ de dos funciones con relación a la monotonía?

3. Estudiar la monotonía de la función afín $f(x) = ax + b$ según los distintos valores de a.
Solución: Si $a > 0$, f es estrictamente creciente; si $a = 0$, f es constante; si $a < 0$, f es estrciatmente decreciente.

4. Demostrar que la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en R.

5. Demostrar que la función $f(x) = e^x$ es una función estrictamente creciente en todo R.

6. Demostrar que la función $f(x) = \ln x$ es una función estrictamente creciente. (ln = logaritmo neperiano)

7. Una función es estrictamente creciente en cada punto de su dominio. ¿Es estrictamente creciente en el dominio? Razonar la respuesta.
Solución: No tiene por qué.

8. Estudiar directamente (sin derivadas) la monotonía de la función $f(x) = x^2$.
Solución: f es estrictamente decreciente en R^-; f es estrictamente creciente en R^+; en $x_0 = 0$, f presenta un mínimo.

9. Demostrar que la función $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$, es estrictamente decreciente en R^+ y en R^-, pero no lo es en R*.

10. Estudiar la monotonía de la función: $f(x) = x - \cos x$.
Solución: f es creciente en todo su dominio, presentando puntos de inflexión en $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

11. Determinar los intervalos de monotonía de la función: $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.
Solución: f decreciente en $(-\infty, -1)$, f creciente en $(-1, 1)$, f decreciente en $(1, +\infty)$.

12. Demostrar que para todo $x \geq 0$, $\sin x \leq x$.

13. Demostrar que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x < \tan x$.

14. Demostrar que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x < x < \tan x$.

15. Demostrar que $e^{x-1} - x \geq 0$ para todo número real x.

16. Demostrar que para todo $x > 0$, $e^x > \frac{1}{1+x}$.

17. Demostrar que para todo $x > 0$, $e^x > 1 + \ln(1+x)$.

18. Demostrar que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$.

19. Demostrar que para todo valor real x distinto de cero, se verifica que: $1 + x < e^x$.