FUNCIONES ACOTADAS. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1. Demostrar que la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$ está acotada en toda la recta real.

2. Demostrar que $x_0=0$ es un mínimo local para la función: $f(x)=\begin{cases} 0, \text{si } x=0 \\ x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, \text{si } x\neq 0 \end{cases}$.

3. Sea la función $f:R\to R$ definida por: $f(x)=\begin{cases} 0, \text{si } x=0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x}, \text{si } x\neq 0 \end{cases}$.
    a. Estudiar la continuidad de *f*.
    b. Encontrar la función derivada *f'* allí donde esté definida.
    c. ¿Posee *f* máximo relativo en *x* = 0?

Solución: *f* es continua en todo R; $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{si } x=0 \\ \dfrac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}, \text{si } x\neq 0 \end{cases}$; no.

4. Dividir un número en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.

Solución: Las partes son iguales entre sí.

5. Hallar los máximos y mínimos de la función: $f(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}$.

Solución: P (0, 4) es un mínimo relativo.

6. Dada la función: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, calcular *a*, *b*, *c* y *d*, sabiendo que tiene un máximo en el punto A (−1, 1) y un mínimo en el punto B (2, −2).

Solución: $a=\dfrac{2}{9}, b=-\dfrac{1}{3}, c=-\dfrac{4}{3}, d=\dfrac{2}{9}$.

7. Hallar los máximos y los mínimos de: $f(x)=e^x\sin x$.

Solución: $\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in Z$, que es mínimo si *k* impar y máximo si *k* par.

8. Hallar los extremos locales de la función: $f(x)=x^5-75x^3+1620x-1000$.

Solución: A (3, 2078) es máximo, B (−3, 3178) es mínimo, C (6, 296) es mínimo, D (−6, 2296) es máximo.

9. Consideremos la función f de R en R dada por: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1}, \text{si } x\leq 0 \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1}, \text{si } x>0 \end{cases}$.
    a. Hallar los valores de *a* y de *b*, sabiendo que *f* es continua en *x* = 0 y que tiene un mínimo en el punto *x* = 2.
    b. Con estos valores de *a* y de *b*, ¿es *f* derivable en todo R?
    c. Hallar las asíntotas de la curva de ecuación $y=f(x)$.

Solución: *a* = 2, *b* = −1; *f* es derivable en R*; *y* = 0, $y=x+1$.

10. Hallar los máximos y mínimos relativos de: $f(x) = x^4 e^{-x^2}$.
Solución: Máximos en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$, mínimo en $x = 0$.

11. Encontrar los extremos locales de: $f(x) = x^x, x > 0$.
Solución: Mínimo relativo en $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}\right)$.

12. Estudiar los extremos de la función: $f(x) = (x-3)^5 + 6$.
Solución: No tiene.

13. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} (x-1)^4 \cos^2 \dfrac{1}{x-1}, \text{si } x \neq 1 \\ 0, \text{si } x = 1 \end{cases}$. Se pide:

a. Hallar $f'(1)$ y $f''(1)$.
b. ¿Existe un mínimo local en $x = 1$?

Solución: $f'(1) = 0, f''(1) = 0$; sí.

14. Determinar a y b para que la función: $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga por mínimo el punto A $(-1, 2)$.
Solución: $a = 2$, $b = 3$.

15. Se considera la función f de R* en R definida por: $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$.

a. Hallar a para que la función posea un mínimo local en $x = 2$.
b. Demostrar que f no puede tener un máximo local para ningún valor de a.

Solución: $a = 16$; $f''(x) = 6, \forall a \in R$.

16. Determinar los extremos locales de la función: $f(x) = \dfrac{3}{x^4 - 2x^2 + 1}$.
Solución: Máximo local en $x = 0$, mínimos locales en $x = -1$ y en $x = 1$.

17. Calcular los extremos de la siguiente función: $f(x) = x^4 e^{-x^2}$
Solución: Máximos locales en $x = -\sqrt{2}$ y en $x = \sqrt{2}$, mínimo local en $x = 0$.

18. Dividir un número en dos partes tales que su producto sea máximo.
Solución: Deben ser iguales entre sí.

19. Descomponer el número 45 en dos sumandos tales que la suma del doble del cuadrado el primero, más siete veces el cuadrado el segundo, sea mínimo.
Solución: $x = 35$, $y = 10$.

20. Descomponer el número 49 en un producto de dos factores de tal forma que la suma de estos sea mínima.
Solución: $x = y = 7$.

21. Descomponer 98 en dos sumandos tales que la suma de sus raíces cuadradas sea máxima.
Solución: $x = y = 49$.

22. Sobre un segmento AB de longitud a se considera un punto variable X. Hallar el valor de AX en función de a para que el área de los triángulos equiláteros de lado AX y XB, sumada, sea mínima.

Solución: Deben ser dos partes iguales.

23. Hallar el triángulo rectángulo de área máxima de los que tienen por hipotenusa el lado a.

Solución: $x = y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

24. Hallar los máximos y mínimos de la función: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Solución: Máximo en $x = 1$, mínimo en $y = -1$.

25. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3, 2) y forma con los ejes cartesianos un triángulo de área mínima situado en el primer cuadrante.

Solución: $2x + 3y - 12 = 0$.

26. Hallar la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente por una esquina de un corredor de 2 m de ancho a otro de 1 m de ancho.

Solución: $l = 4{,}162$ m.

27. A un río de anchura a metros se le ha construido un canal de anchura b metros, formando un ángulo recto. ¿Cuál es la longitud máxima que podrá tener un barco que navegue por el río para poder pasar a navegar por el canal?

Solución: $l = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$.

28. Por el punto de coordenadas P (3, 2) se traza una recta variable. Hallar la ecuación de la recta tal que el segmento interceptado por los semiejes positivos sea mínimo.

Solución: $\dfrac{x}{3+\sqrt[3]{12}} + \dfrac{y}{2+\sqrt[3]{18}} = 1$.

29. Hallar un número tal que el exceso sobre su cuadrado sea máximo.

Solución: $x = 1/2$.

30. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo equilátero de lado a.

Solución: base $= \dfrac{a}{2}$, altura $= \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

31. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles que tiene 10 cm de base y 16 cm de altura.

Solución: x (base) = 5, y (altura) = 8.

32. Un pueblo B se encuentra a 20 km de la vía recta de un ferrocarril. Se trata de construir un apeadero C para que el viaje desde el pueblo A, por el que pasa la vía, al pueblo B dure lo menos posible. La velocidad por ferrocarril es de 0,8 km/min y por la carretera CB es de 0,2 km/min.

Solución: x (distancia CD, D pie de la perpendicular trazada desde B a la vía) = 5,1639 km, $a \geq x$.

33. Una partícula pasa de un medio a otro con velocidades constantes v_1 y v_2, respectivamente. Demostrar que para que sea mínimo el tiempo que tarda en pasar del punto A, situado en el primer medio, al punto B, situado en el segundo medio y sobre distinta normal al medio que el punto A,

tiene que recorrer un camino AOB tal que: $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$. ($\theta_1$ es el ángulo que forma AO con la normal en O, mientras que θ_2 es el ángulo que forman dicha normal en O y el segmento OB.)

34. Dos pueblos, A y B, están situados a 10 y a 15 km de distancia de un río rectilíneo, ambos en la misma margen. Un arriero parte de A y se dirige a B pasando por la orilla del río para abrevar a su borrico. ¿En qué punto M del río tiene que abrevar para que el camino de A a B sea mínimo, sabiendo que la proyección del segmento AB es de 20 km?

Solución: x (distancia desde M hasta el pie de la perpendicular de A) = 8 km, y (distancia de M al pie de la perpendicular de B) = 12 km.

35. Entre todos los triángulos isósceles de perímetro p constante, encontrar el de área máxima.

Solución: Se trata de un triángulo equilátero, de lado $l=\frac{2p}{3}$.

36. Una piedra preciosa pesa 12 quilates. Sabiendo que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que su valor es 1450 €, calcular la depreciación máxima cuando se divide en dos trozos. Hallar los valores de los trozos, suponiendo que no se pierde peso en la separación.

Solución: Ambos trozos son de 6 quilates y valen 362,50 €.

37. Entre todos los rectángulos de perímetro p constante, hallar el de área máxima.

Solución: Se trata de un cuadrado de lado $l = p/4$.

38. Entre todos los rectángulos de área S constante, encontrar el de perímetro mínimo.

Solución: Se trata de un cuadrado de perímetro $p=4\sqrt{S}$.

39. Una araña se encuentra en una esquina de una habitación rectangular de 3 m por 8 m, y una mosca en la esquina opuesta. La habitación se encuentra alfombrada prácticamente entera, excepto el borde en el que se ve el parqué. Sabiendo que la araña tarda el mismo tiempo en recorrer 5 m de parqué que 4 m de alfombra, hallar el camino que debe seguir la araña para que llegue donde la mosca en el mínimo tiempo posible.

Solución: Recorre 4 m por la orilla del lado mayor y luego cruza en línea recta, por la alfombra, hacia la mosca.

40. En un campo se quiere delimitar una parcela de 216 m^2 por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. Hallar las dimensiones para que la longitud total de la valla sea mínima.

Solución: Lado paralelo a la valla medianera, x = 12 m; el otro lado, y = 18 m.

41. Un rectángulo debe tener una superficie de 64 m^2. Hallar sus dimensiones de forma que la distancia de uno de sus vértices al punto medio de un lado no adyacente sea mínima.

Solución: Lado del que se toma el punto medio, $y=8\sqrt{2}$ m; el otro lado, $x=4\sqrt{2}$ m.

42. Hallar el rectángulo de superficie máxima circunscrito a otro rectángulo de lados a y b.

Solución: Se trata de un cuadrado de lado $l=(a+b)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

43. Un espejo plano, que tenía forma de cuadrado de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina según una recta. Uno de los trozos tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 40 y 32 cm. Se pide:

a. Hallar las dimensiones del espejo rectangular de área máxima que puede recortarse del otro trozo, de modo que los bordes del nuevo espejo sean paralelos a los del primitivo.
b. Calcular dicha área máxima.

Solución: 70 cm x 56 cm; 3920 cm^2.

44. Dividir un arco a de circunferencia dado en dos arcos tales que la suma de las cuerdas correspondientes sea máxima.

Solución: Se divide en dos partes iguales, $x = a/2$.

45. Sea C una circunferencia de radio R. Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en ella. Hallar el área de dicho rectángulo para R = 1,017 cm, calculándola de forma aproximada mediante el concepto de diferencial.

Solución: Se trata de un cuadrado de lado $l = R\sqrt{2}$; $S = 2{,}068$ cm^2.

46. Un jardinero debe construir un parterre de forma de sector circular, con un perímetro de 20 m. ¿Cuál será el radio que dará el parterre de área máxima?

Solución: $r = 5$ m.

47. Una ventana normanda se forma sustituyendo el lado superior de un marco rectangular por un semicírculo. Dado el perímetro p de la ventana, hallar sus dimensiones para que el flujo luminoso a su través sea máximo.

Solución: Base, $a = \dfrac{2p}{4+\pi}$; altura hasta la base del semicírculo, $b = \dfrac{p}{4+\pi}$.

48. Las manecillas de un reloj miden 8 y 10 cm. Unimos sus extremos formando un triángulo. Se pide:
    a. Expresar el área del triángulo en función del tiempo.
    b. Determinar el instante, comprendido entre las 12 h y las 12 h 30 min para el cual es máxima el área.
    c. Hallar dicha área.

Solución: $S(t) = 40\sin 0{,}096t$; 12 h 16 min 21,8 s; 40 cm^2.

49. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio r, estando su base inferior sobre el diámetro.

Solución: Base, $b = r\sqrt{2}$; altura, $h = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

50. Una pieza de alambre de longitud L se corta en dos trozos; con uno de ellos se forma un cuadrado y con el otro un círculo. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima?

Solución: Lado del cuadrado, $x = \dfrac{L}{4+\pi}$; radio del círculo, $R = \dfrac{L}{2(4+\pi)}$.

51. Hallar las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima inscrito en una circunferencia de radio R.

Solución: Se trata de un triángulo equilátero de lado, $l = R\sqrt{3}$.

52. Dos mástiles, de alturas a y b, están a una distancia d. Hallar un punto sobre la recta que une sus bases de manera que la suma de los cuadrados de las distancias de él a los vértices sea la menor posible.

Solución: Es el punto medio entre los dos mástiles.

53. Encontrar el punto de la parábola $y = x^2$ más próximo al punto (0, 1).

Solución: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

54. Hallar la ecuación de la elipse de área mínima que pasa por A (1, 1) y cuyos ejes son los de coordenadas.

Solución: $x^2 + y^2 = 2$.

55. Las dimensiones de un terreno de fútbol son 60 m por 90 m; se supone que la portería tiene 7 m. ¿Desde qué punto de la banda tiene el extremo el ángulo de tiro óptimo?

Solución: A una distancia del córner, $x = 29{,}795$ m.

56. Determinar las coordenadas de los puntos de la parábola $y^2 = 4x$, tales que la distancia al punto A (4, 0) sea mínima.

Solución: A $\left(2, 2\sqrt{2}\right)$ y B $\left(2, -2\sqrt{2}\right)$.

57. Un triángulo isósceles, de 30 cm de perímetro, gira alrededor de su altura engendrando un cono. Hallar las dimensiones del triángulo para que el volumen sea máximo.

Solución: Base, b = 12 cm; lado, a = 9 cm.

58. Dada una esfera de radio R y todos los cilindros inscritos en ella, hallar la altura del cilindro de área total máxima.

Solución: $h = R\sqrt{\frac{10+\sqrt{20}}{5}}$.

59. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm cada uno. Calcular las dimensiones de la hoja para las cuales el gasto de papel es mínimo.

Solución: x = 5 cm, y = 10 cm.

60. La suma de las longitudes de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es constante. Hallar las dimensiones del prisma para que su volumen sea máximo.

Solución: Se trata de un cubo.

61. Una empresa quiere fabricar cajas de cartón, sin tapa, de piezas rectangulares de lados 5 y 8 dm, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando. ¿Cómo deben cortarse los cuadrados para que la capacidad de la caja sea máxima?

Solución: x = 1 cm de lado.

62. Un prisma hexagonal regular tiene un volumen de 36 m^3. Hallar las dimensiones para que su superficie total sea mínima.

Solución: Lado de la base, x = 2 m; altura, $h = 2\sqrt{3}$ m.

63. Hallar las dimensiones del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir en un cono de radio R y altura H.

Solución: Radio, $r = \frac{2}{3}R$; altura, $h = \frac{1}{3}H$.

64. Hallar la relación entre la altura y el radio de un cilindro de volumen constante para que la superficie total sea mínima.

Solución: $h = 2R$.

65. Se quiere inscribir un cilindro en una esfera de radio R. Hallar las dimensiones del cilindro si su volumen ha de ser máximo.

Solución: Radio, $r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$; altura, $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

66. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre los que tienen la superficie total constante e igual a K.

Solución: Radio, $r = \sqrt{\dfrac{K}{6\pi}}$; altura, $h = 2r$.

67. Admitiendo que la resistencia a la flexión de una viga de sección rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura, hallar las dimensiones de máxima resistencia de una viga que puede sacarse de un madero cilíndrico de diámetro d.

Solución: $x = \dfrac{d\sqrt{3}}{3}$; $y = \dfrac{d\sqrt{6}}{3}$.

68. Hallar las dimensiones del cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

Solución: Radio, $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$; altura, $h = \dfrac{4}{3}R$.

69. Se quiere circunscribir un cono a una esfera de radio R. Hallar las dimensiones del cono si su volumen ha de ser mínimo.

Solución: Radio, $r = R\sqrt{2}$; altura, $h = 4R$.

70. De todos los conos de revolución de generatriz 10 cm, ¿cuál es el de volumen máximo?

Solución: Radio, $r = 10\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm; altura, $h = 10\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ cm.

71. En los laboratorios de hacen filtros cónicos plegando un papel de filtro circular de radio R. Hallar las dimensiones de dicho cono para que el volumen sea máximo.

Solución: Radio, $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$; altura, $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R$.

72. Una boya, formada por dos conos rectos de hierro unidos por sus bases, se debe construir con dos placas circulares de hierro, de radio R. Hallar las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

Solución: Radio, $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$; altura, $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R$.

73. Se quiere construir una caja abierta, de base cuadrada y de 108 litros de capacidad. Hallar las dimensiones para que la superficie sea mínima y, por tanto, mínimo el coste de fabricación en material.

Solución: Lado de la base, $x = 6$ dm; altura, $h = 3$ dm.

74. Un perro está atado con un lazo corredizo a una columna de base cuadrada, cuyo lado es a cm. La longitud de la cuerda es L. El perro trata de alejarse de la columna lo más posible tirando de la cuerda perpendicularmente a una de las caras, con lo que el nudo se aproxima a la columna. Hallar a qué distancia de la cara se detiene el nudo y el ángulo que forma la cuerda con dicha cara.

Solución: Distancia, $x = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ cm; ángulo, $\theta = 30^\circ$.

75. Se consideran los rectángulos de 12 m de perímetro. Hallar las dimensiones del rectángulo que, al girar alrededor de uno de sus lados, engendra un cilindro de volumen máximo.

Solución: Base, $x = 4$ m; altura, $y = 2$ m.

76. Un ingeniero está diseñando un acueducto y tiene que utilizar láminas rectangulares de metal de 4m de ancho por 10 m de largo. Quiere doblar las láminas a lo largo para formar dos ángulos rectos, de modo que el caudal sea máximo. Hallar las dimensiones.

Solución: Altura, $x = 1$ m; anchura, $y = 2$ m.

77. Calcular la longitud que debe tener una cuerda de una circunferencia de radio R para que al girar 360º alrededor de un diámetro paralelo a ella, engendre una superficie de área máxima.

Solución: $R\sqrt{2}$.

78. Calcular el tiempo necesario para cruzar en línea recta y con la mínima velocidad, una calle de anchura c metros, por la que circulan en un solo sentido y por un único carril, automóviles con velocidad v, de anchura b y espaciados uno de otro a metros. (Aplicación: Anchura de la calle 10 m, anchura de los coches 2 m, velocidad de los coches 36 km/h, separación entre coches 5 m.)

Solución: $t = \dfrac{c\left(a^2 + b^2\right)}{abv}$; $t = 2{,}9$ s.

79. Un terreno rectangular está limitado por dos caminos M y N, y en uno de sus vértices se encuentra el extremo P de un pequeño lago. Sabiendo que la distancia de P a los caminos M y N es de 108 m y 256 m, respectivamente, hallar la longitud de la trayectoria más corta por la que se puede ir de un camino a otro cruzando el terreno y pasando por el extremo del lago.

Solución: 500 m.