Cónicas

1. Dada la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$, hallar el centro y el radio.

Solución: C (3, −5); r = 6.

2. Dada la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 2ax + 4ay - 4a^2 = 0$, hallar el centro y el radio.

Solución: C (a, −2a); r = 3a.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (1, 0), B (3, −2) y C (1, −4), o lo que es igual, hallar la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Solución: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto C (1, 2) y que pasa por el punto P (−1, −2).

Solución: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto (6, 0) y tangente a la parábola: $y^2 = 4x$.

Solución: $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$.

6. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a la recta $3x + 4y - 7 = 0$ en el punto P (1, 1).

Solución: $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25;\ (x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

7. Hallar la ecuación de las circunferencias que pasan por A (−1, 5) y B (4, 4) y es tangente a la recta $3x + 2y + 6 = 0$.

Solución: $(x-5)^2 + (y-22)^2 = 325;\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$.

8. Dada la circunferencia $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 25$, hallar las ecuaciones de las tangentes paralelas a la recta $3x + 4y - 13 = 0$.

Solución: $3x + 4y + 33 = 0;\ 3x + 4y - 17 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por (−1, 2) y que tiene la misma secante común que las circunferencias: $c_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x - y + 3 = 0$; $c_2 \equiv x^2 + y^2 - x - 2y + 5 = 0$.

Solución: $11x^2 + 11y^2 + 34x - 23y + 25 = 0$.

10. Hallar la tangente en el punto P (−1, 5) de la circunferencia dada por: $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.

Solución: $2x + 3y - 13 = 0$.

11. Hallar la ecuación de las tangentes desde el punto P (−5, 6) a la circunferencia dada por: $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$.

Solución: $5x - 3y + 43 = 0;\ 3x + 5y - 15 = 0$.

12. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$, hallar las ecuaciones de las tangentes a la misma paralelas a la recta $3x - 2y + 21 = 0$.

Solución: $3x - 2y + 13 = 0;\ 3x - 2y - 13 = 0$.

13. Dadas las circunferencias siguientes: $c_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y + 4 = 0$; $c_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + y + 3 = 0$, hallar las coordenadas de un punto que tiene la misma potencia respecto de las dos circunferencias y que equidista de los ejes OX y OY.

Solución: $P\left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

14. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro la cuerda común de las circunferencias: $c_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$ y $c_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$.

Solución: $x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P (1, 2) y es tangente a los ejes de coordenadas.

Solución: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

16. El punto medio de la cuerda de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es M (5, 2). Hallar la ecuación de la recta que contiene a la cuerda.

Solución: $x + 2y - 9 = 0$.

17. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos F (0, 2) y F' (0, −2) y cuyo semieje menor es b = 3.

Solución: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$.

18. Hallar la ecuación de las tangentes trazadas desde el punto P (9, −4) a la elipse de ecuación $2x^2 + 3y^2 = 30$.

Solución: $x + y - 5 = 0$; $x + y + 35 = 0$.

19. Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$, se pide las ecuaciones de las tangentes a la elipse y paralelas a la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: $y = x + 5$; $y = x - 5$.

20. Dada la cónica $9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0$, se pide:
    a. Comprobar que se trata de una elipse y obtener su ecuación reducida.
    b. Coordenadas del centro, de los vértices y de los focos.
    c. Ecuaciones de los ejes
    d. Valores de a, b y c
    e. Excentricidad

Solución:

a. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.

b. C (2, −3); F (6, −3); F' (−2, −3); A (7, −3); A' (−3, −3); B (2, 0); B' (2, −6).

c. AA': $y = -3$; BB': $x = 2$.

d. $a = 5$; $b = 3$; $c = 4$.

e. $e = 4/5$.

21. Hallar la ecuación de la elipse que tiene por focos los puntos F (8, 6) y F' (−4, 3) y que pasa por O (0, 0).

Solución: $9x^2 + 24y^2 - 8xy - 200y = 0$.

22. Dada la hipérbola de ecuación $x^2 - 4y^2 = 9$, se pide las ecuaciones de las tangentes paralelas a la recta $5x - 8y = 32$.

Solución: $5x - 8y + 9 = 0$; $5x - 8y - 9 = 0$.

23. Hallar las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola de ecuación: $3x^2 - 4xy + 16 = 0$.

Solución: $x = 0$; $y = \frac{3}{4}x$.

24. Demostrar que en una hipérbola equilátera la distancia desde uno de los focos a una de las asíntotas es igual al semieje a.

Cónicas

25. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$, que son paralelas a la recta: $x - y + 7 = 0$.

Solución: $x - y + 1 = 0;\ x - y - 1 = 0$.

26. Dada la parábola $x^2 + y^2 - 2xy - 6x + 2y + 7 = 0$, se pide:
    a. Las coordenadas del foco F.
    b. La ecuación de la directriz.

Solución:

a. F (2, 0).

b. $x + y - 1 = 0$.

27. Dada la parábola $y = 3x^2 + 5$ y la recta $y = 4x + k$, determinar k para que la recta sea tangente a la parábola.

Solución: $k = 11/3$.

28. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto P (−5, 4) a la parábola de ecuación: $y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$.

Solución: $x - 2y + 13 = 0;\ x + y + 1 = 0$.

29. Un triángulo isósceles rectángulo está inscrito en la parábola $y^2 = 2px$, con el ángulo recto en el vértice de la misma. Se pide:
    a. Longitud de los lados.
    b. Área del triángulo rectángulo isósceles.

Solución:

a. $2p\sqrt{2};\ 4p$.

b. $4p^2$.

30. Dado el vértice V (2, 3) y el foco F (6, 3) de una parábola, se pide su ecuación.

Solución: $y^2 - 6y - 16x + 41 = 0$.

31. Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta: $x + 2y - 1 = 0$ en la elipse de ecuación: $x^2 + 2y^2 = 3$.

Solución: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

32. Una elipse tiene de excentricidad 3/5 y pasa por el punto P (3, 4). Se pide:
    a. La ecuación reducida de esta elipse.
    b. La ecuación de la tangente en P.
    c. La ecuación de la normal en P.

Solución:

a. $\dfrac{x^2}{34} + \dfrac{y^2}{\frac{544}{25}} = 1$

b. $y - 4 = -\frac{12}{25}(x - 3)$.

c. $y - 4 = \frac{25}{12}(x - 3)$.

33. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la elipse de ecuación: $3x^2 + 4y^2 = 16$ en el punto de abscisa $x = 2$ y ordenada negativa.

Solución: $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$; $y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$.

34. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la elipse:

a. $x^2 + 6y^2 = 100$, en el punto $y = 4$ y x positiva.

b. $x^2 + 2y^2 = 19$, en el punto de abscisa $x = 1$.

c. $x^2 + 2y^2 = 6$, en el punto P (2, −1).

d. $4x^2 + 3y^2 = 39$, en el punto de ordenada 1 y abscisa negativa.

Solución:

a.

b.

c.

d.

35. Dada la elipse de ecuación: $4x^2 + y^2 = 8$, se pide:

a. Las ecuaciones de las tangentes a ella en los puntos de abscisa $x = 1$.

b. El área del triángulo formado por ellas y la cuerda determinada por los puntos de tangencia.

Solución:

a.

b.

36. La ecuación: $4x^2 - y^2 = 4$, ¿qué curva representa? Hallar sus principales elementos y dibujarla.

Solución:

37. Una hipérbola tiene por asíntotas las rectas: $y = \pm\frac{3}{4}x$ y pasa por el punto (8, 5). Hallar su ecuación.

Solución:

38. Una hipérbola tiene por ecuación: $2x^2 - 5y^2 = 20$. Se pide:

a. El punto de la curva cuya abscisa es doble de la ordenada.

b. La longitud de los radios vectores correspondientes a dicho punto.

c. Las ecuaciones de la tangente y de la normal en él.

Solución:

a.

b.

c.

39. Dada la hipérbola de ecuación: $x^2 - 4y^2 = 8$, determinar el valor de n para que la recta $y = 2x + n$

sea tangente a la hipérbola.

Solución:

40. Un punto se mueve de modo que la diferencia de sus distancias a los puntos (−4, 0) y (4, 0) es igual a 6 cm. Hallar la ecuación de su trayectoria.

Solución:

41. Encuentre la ecuación de la parábola de eje paralelo a OY, vértice en OX, pasa por los puntos A (2, 3) y B (−1, 12).

Solución:

42. Ecuación de la parábola de eje paralelo a OY, vértice en la recta $y = 2$, parámetro 3, y pasa por (0, 8).

Solución:

43. En los siguientes casos, reducir a forma típica, situar el vértice, determinar el parámetro, el foco y la directriz, y hacer la gráfica:

a. $y^2 + 8x + 8 = 0$.

b. $y^2 - 5x + 10 = 0$.

c. $x^2 - 4x - 4y = 0$.

d. $x^2 + 6x - y - 2 = 0$.

e. $y^2 + 5x - 3y = 0$.

f. $x^2 - x - y = 3$.

g. $2x^2 + 4x + y + 6 = 0$.

h. $3y^2 - 2x - 6y = 0$.

Solución:

a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

h.

44. Calcular los ejes, vértices, excentricidad y hacer la representación gráfica de cada una de las siguientes elipses:

a. $3x^2 + 5y^2 = 15$.

b. $16x^2 + 25y^2 = 400$.

c. $25x^2 + 16y^2 = 400$.

d. $16x^2 + 9y^2 = 576$.

e. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solución:

a.

b.

c.

d.

e.

45. Determinar la ecuación reducida de cada una de las siguientes elipses, con los datos que se indican:

a. Eje mayor 12 cm y distancia entre los focos, 8 cm.

b. Distancia focal 12 cm y excentricidad 3/4.

c. Distancia focal $4\sqrt{2}$ cm y eje menor 4 cm.

d. Distancia focal $8\sqrt{6}$ cm y área del rectángulo construido sobre los ejes, 80 cm^2.

e. Distancia focal 10 cm y pasa por P (4, 3).

Solución:

a.

b.

c.

d.

e.

46. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto P (6, 4) y tiene por eje mayor 18 unidades.

Solución:

47. ¿Cuál es la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos A (0, 4) y B (3, $2\sqrt{3}$).

Solución:

48. El punto P $\left(5,\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, ¿pertenece a la elipse de eje mayor 20 cm y eje menor 10 cm?

Solución:

49. Un punto se mueve en el plano de modo que la suma de sus distancias a los puntos (−8, 0) y (8, 0) es constante e igual a 20 cm. Calcular la ecuación de su trayectoria y dibujarla.

Solución:

50. ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria de un móvil que se desplaza sobre un plano de modo que la suma de sus distancias a los puntos (0, 4) y (0, −4) es 12?

Solución:

51. Hallar le ecuación de una hipérbola conociendo el eje focal $2a = 8$ cm y la distancia focal $2c = 10$ cm.

Solución:

52. El eje focal de una hipérbola mide 12 cm y la excentricidad es 4/3. Calcular la ecuación de la hipérbola.

Solución:

53. Dibujar la hipérbola de ecuación: $2x^2 - y^2 = 9$, previo cálculo de vértices y focos.

Solución:

54. El eje focal de una hipérbola mide 12 cm y la curva pasa por el punto P (8, 14). Hallar su ecuación.

Solución:

Cónicas

55. Una hipérbola tiene de ecuación: $9x^2 - 16y^2 = 144$. Calcular los radios vectores correspondientes al punto de abscisa $x = 6$.

Solución:

56. ¿Cuál es la ecuación de una hipérbola equilátera cuya distancia focal es $8\sqrt{2}$ cm?

Solución:

57. En las hipérbolas siguientes, calcular los ejes, focos, vértices y asíntotas y dibujar las curvas:

a. $9x^2 - 25y^2 = 225$.

b. $x^2 - 2y^2 = 18$.

c. $2x^2 - y^2 = 18$.

d. $x^2 - y^2 = 32$.

Solución:

a.

b.

c.

d.

58. La hipérbola de ecuación: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ pasa por el punto P $(-10, 4)$. Se pide:

a. La ecuación de la hipérbola.

b. Las coordenadas de los focos.

c. Las ecuaciones de las asíntotas.

d. La ecuación de la tangente en P.

e. La ecuación de la normal en P.

Solución:

a.

b.

c.

d.

e.

59. Hallar las asíntotas de la hipérbola: $2x^2 - y^2 = 9$.

Solución:

60. Calcular las ecuaciones de la tangente y de la normal a la hipérbola: $2x^2 - y^2 = 9$ en el punto de abscisa $x = 3$ y ordenada positiva.

Solución:

61. En los casos siguientes situar el vértice, el foco, el eje, la directriz y algún punto más y trazar las gráficas de las siguientes curvas:

a. $y^2 = 6x$.

b. $y^2 = -6x$.

c. $x^2 = -6y$.

d. $y = -x^2$.

e. $3y^2 + x = 0$.

f. $7x^2 = 3y$.

g. $(y-2)^2 = 4(x-1)$.

h. $(x-2)^2 = 2(y+1)$.

i. $(y-2)^2 = -10(x+3)$.

j. $4(y-5) = -(x+3)^2$.

Solución:

a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

h.

i.

j.

62. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice coincide con el origen de coordenadas, su eje con OX, y pasa por el punto P (4, 4).

Solución:

63. Hallar la ecuación de la parábola de eje la recta $y = 0$, foco el punto F (2, 0) y parámetro $2p = 8$.

Solución:

64. Ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x + y = 6$ y por foco el origen de coordenadas.

Solución:

65. Ecuación de la parábola que tiene por directriz $y = 0$, y por foco el punto P (2, 4).

Solución:

66. Hallar las ecuaciones de las tangentes a cada una de las siguientes elipses desde los puntos que se indican:

a. $x^2 + 2y^2 = 20$, desde el punto P (6, 0).

b. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$, desde el punto P (0, 6).

c. $4x^2 + y^2 = 8$, desde el punto P (1, 3).

Solución:

a.

b.

c.

67. Dada la elipse de ecuación: $3x^2 + 5y^2 = 15$, calcular las ecuaciones de las tangentes a ella paralelas a la bisectriz del primer cuadrante.

Solución:

68. Calcular las ecuaciones de las tangentes a la elipse: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$, que son:

  a. Paralelas a la recta: $2x-y+12=0$.

  b. Perpendiculares a la recta: $2x-y+12=0$.

Solución:

  a.

  b.

69. Los radios vectores de un punto P de una elipse están sobre las rectas: $x=3;\ 8x-15y+24=0$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse y las ecuaciones de la tangente y de la normal en ese punto P.

Solución:

70. Dos puntos del eje OX, simétricos respecto al origen O, son vértices de una elipse correspondientes al eje focal, y cuyo eje menor es igual a 8 cm. Hallar la ecuación de la elipse, sabiendo que es tangente a la recta: $x-y=5$.

Solución:

71. ¿Cuál será la ecuación de la elipse: $9x^2+25y^2=225$ cuando esté referida a unos ejes paralelos a los suyos y trasladados al nuevo origen O’ (2, 3)?

Solución:

72. ¿Cuál será la ecuación de la elipse: $9x^2+25y^2=225$ cuando esté referida a las bisectrices de sus ejes como nuevos ejes de coordenadas?

Solución:

73. Si la ecuación de una hipérbola es: $xy = 1$, ¿cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿Cuáles son las ecuaciones de sus ejes? ¿Cuáles son las coordenadas de sus focos?

Solución:

74. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola: $x^2-y^2=25$ trazadas desde el punto (0, 4).

Solución:

75. Calcular las ecuaciones de las tangentes y normales a la hipérbola de ecuación: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ en los puntos de intersección con la bisectriz del primer cuadrante.

Solución:

76. ¿Qué ángulo forman las asíntotas de la hipérbola: $25x^2-9y^2=24$?

Solución:

77. El punto P (13, 12), ¿pertenece a la hipérbola equilátera de distancia focal $2c=10\sqrt{2}$? En caso afirmativo calcular la tangente y la normal a la hipérbola en ese punto.

Solución:

78. Calcular el valor del área del triángulo que la tangente a la hipérbola: $xy = 50$ forma, en el punto de abscisa $x = 5$, con los ejes coordenados.

Solución:

Cónicas

79. El eje no focal de una hipérbola mide 8 cm y las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm \frac{2}{3}x$. Calcular la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos y vértices. Hacer su gráfica.

Solución:

80. Hallar la ecuación de la parábola de eje vertical y que pasa por los puntos: A (6, 1), B (−2, 3), C (16, 6).

Solución:

81. Dada la parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x - 4$, hallar el área del triángulo limitado por los ejes coordenados y la tangente en el punto de abscisa x = 3.

Solución:

82. Hallar las ecuaciones de las tangentes y las normales a las curvas siguientes en los puntos que se indican:

a. $2y^2 + x = 0$, en el punto de abscisa $x = -8$.

b. $3y^2 = 4x$, en el punto de ordenada $y = -2$.

c. $y = x^2 - 2x + 4$, en el punto de abscisa $x = 1$.

d. $y = x^2 - 2x - 1$, en el punto de abscisa $x = 2$.

e. $y = \sqrt{x+7}$, en el punto de abscisa x = 2.

Solución:

a.

b.

c.

d.

e.

83. Los puntos en que las bisectrices de los ángulos formados por los ejes coordenados cortan a la parábola: $y = x^2 - 6x$ forman un triángulo. Calcular su área.

Solución:

84. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola: $y = 4x^2 + x - 20$ con las bisectrices de los ejes coordenados. Dichos puntos son los vértices de un cuadrilátero. Se pide el área del mismo.

Solución:

85. La tangente a la curva: $y = x^2 + 7x - 10$, en el punto de abscisa $x = 3$, forma con los ejes de coordenadas un triángulo. Calcular su área.

Solución:

86. Hallar los puntos de la parábola: $y^2 - 5y + 6 = x$ que equidistan de A (7, 4) y de B (−3, −2).

Solución:

87. Dados los puntos A (−1, −1) y B (1, 3), calcular la ecuación de la parábola que pasa por el origen, tiene por cuerda al segmento AB y su eje es vertical. Calcular también la tangente en el origen.

Solución:

88. Hallar la ecuación de la parábola de eje vertical, que pasa por los puntos A (1, 5), B (4, 8) y C (6, 0).

Calcular el área del triángulo formado por las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje de abscisas y este eje. Efectuar la representación gráfica correspondiente.

Solución:

89. Determinar la ecuación de la parábola que tiene su foco en el punto F (0, 2) y por directriz la recta: $y = x - 2$. Calcular el eje y el vértice de esta parábola.

Solución: