Cinemática de la partícula

- Posición (**ecuación del movimiento**): $\vec{r}(t)$

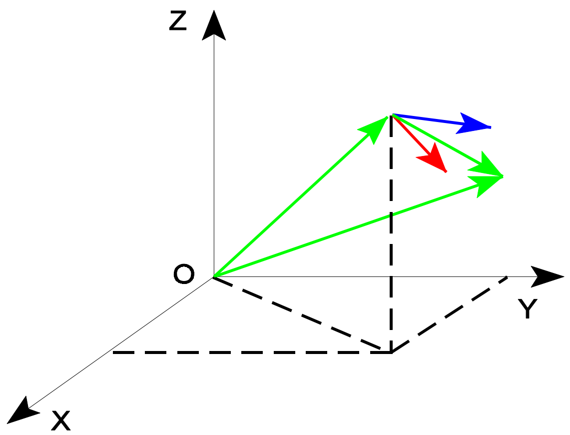
- Ecuaciones paramétricas del movimiento: $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

- Desplazamiento (entre dos posiciones): $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$

- Trayectoria (curva descrita por los extremos de los vectores de posición): (*c*). Las propias ecuaciones paramétricas del movimiento representan, a la vez, las *ecuaciones paramétricas de la trayectoria*. Si se elimina el parámetro *t* (tiempo) entre ellas, se obtiene la *ecuación cartesiana de la trayectoria*.

- Velocidad (tangente a la trayectoria en cada punto): $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t)$

- Aceleración: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$



En general,

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = (x, y, z) \\ \vec{v}(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \\ \vec{a}(t) = \left(\dfrac{dv_x}{dt}, \dfrac{dv_y}{dt}, \dfrac{dv_z}{dt}\right) \equiv \left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, \dfrac{d^2z}{dt^2}\right) \end{cases}$$

Aunque también se podrían expresar los vectores como:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = r \cdot \vec{u}_r;\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vec{v}(t) = v \cdot \vec{u}_v;\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ \vec{a}(t) = a \cdot \vec{u}_a;\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \end{cases}$$

donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}(t)$, $\vec{u}_v$ es un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{v}(t)$, y $\vec{u}_a$ es un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{a}(t)$; y donde *r*, *v*, *a* son, respectivamente, los módulos de la posición (distancia), de la velocidad (celeridad o rapidez) y de la aceleración.

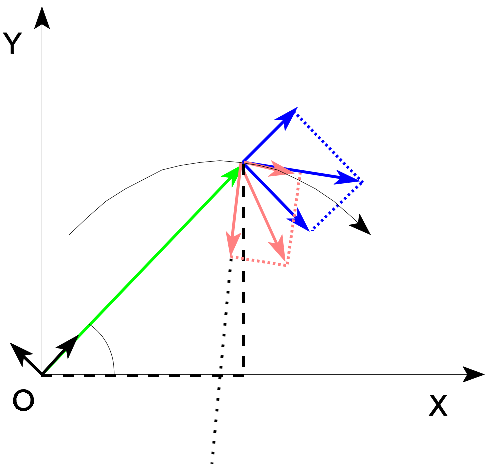
En un movimiento plano, se puede expresar $\vec{r}(t)$ de dos formas equivalentes: $\begin{cases} (1)\ \vec{r}(t) = (x, y) \\ (2)\ \vec{r}(t) = r.\vec{u}_r \end{cases}$.

Si se aplica la definición de velocidad a partir de la expresión (1), queda: $(3)\ \vec{v}(t) = (v_x, v_y)$.

Y si, a partir de la expresión (3), se aplica la definición de aceleración: $(4)\ \vec{a}(t) = (a_x, a_y)$.

Ahora bien, si se aplica la definición de velocidad a partir de la expresión (2), queda:

$$(5)\ \vec{v}(t) = \frac{d\,(r.\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}.\vec{u}_r + r.\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$



Como $\begin{cases}\vec{u}_r = (\cos\,\theta\ ,\ sen\ \theta)\\ \vec{u}_\theta = (-sen\ \theta\ ,\ \cos\,\theta)\end{cases}$, el valor de

$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.(-sen\ \theta\ ,\ \cos\,\theta) = \frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_\theta$, y, con ello, la expresión (5) se puede poner como:

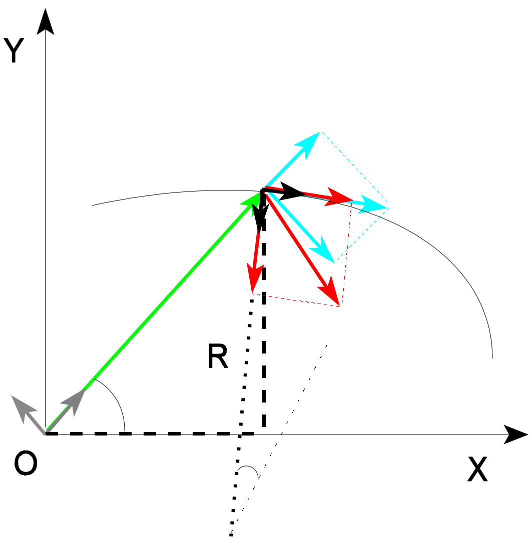
$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}.\vec{u}_r + r.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_\theta}\ (6)$$

Los dos términos del segundo miembro de la igualdad anterior representan dos componentes, ortogonales entre sí, de la velocidad, que reciben los nombres de:

1. **Velocidad radial**: $v_r = \frac{dr}{dt}$, que tiene la misma dirección que el vector de posición, $\vec{r}(t)$.
2. **Velocidad transversal**: $v_\theta = r.\frac{d\theta}{dt} \equiv r.\omega$ (donde ω se conoce como velocidad angular), que es perpendicular a $\vec{r}(t)$.

La *radial* mide los alejamientos o aproximaciones de la partícula al origen de coordenadas (posición del observador), independientemente de la dirección en que se la localice. La *transversal* mide los cambios en la dirección de observación de la partícula, con independencia de su distancia al origen.

En general, las componentes radial y transversal de la velocidad arrojan más información física que las componentes cartesianas.



Análogamente, se puede expresar $\vec{v}(t)$ de dos formas equivalentes: $\begin{cases}(7)\ \vec{v}(t) = (v_x\ ,\ v_y)\\ (8)\ \vec{v}(t) = v.\vec{u}_v\end{cases}$.

Si se aplica la definición de aceleración a partir de la expresión (7), queda: $\vec{a}(t) = (a_x\ ,\ a_y)$, que es la expresión (4) que ya habíamos visto.

Ahora bien, si se aplica la definición de aceleración a partir de la expresión (8), queda:

$$(9)\ \vec{a}(t) = \frac{d\,(v.\vec{u}_v)}{dt} = \frac{dv}{dt}.\vec{u}_v + v.\frac{d\vec{u}_v}{dt}$$

Con el mismo razonamiento seguido para $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$, ahora será: $\begin{cases}\vec{u}_v = (\cos\,\varphi\ ,\ sen\ \varphi)\\ \vec{u}_n = (-sen\ \varphi\ ,\ \cos\,\varphi)\end{cases}$

Y, por tanto, $\frac{d\vec{u}_v}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}.(-sen\ \varphi\ ,\ \cos\,\varphi) = \frac{d\varphi}{dt}.\vec{u}_n$.

Con lo que la expresión (9) acaba como:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}.\vec{u}_v + v.\frac{d\varphi}{dt}.\vec{u}_n \equiv \frac{dv}{dt}.\vec{u}_v + \frac{v^2}{R}.\vec{u}_n}\ (10)$$

Los dos términos del segundo miembro de la igualdad anterior representan dos componentes (llamadas *intrínsecas* porque se refieren a unos ejes que van ligados a la partícula, sea cual sea su posición), ortogonales entre sí, de la aceleración, que reciben los nombres de:

1. **Aceleración tangencial**: $a_t = \frac{dv}{dt}$, que tiene la misma dirección que el vector velocidad, $\vec{v}(t)$.
2. **Aceleración normal**: $a_n = v.\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v^2}{R}$ (donde R se conoce como radio de curvatura), que es perpendicular a $\vec{v}(t)$.

La *tangencial* mide los cambios de rapidez de la partícula sobre la trayectoria, independientemente de la forma de ésta. La *normal* mide los cambios en la dirección de la velocidad de la partícula a medida que ésta describe su trayectoria, y con independencia de que la celeridad se altere o no; está, por tanto, relacionada con la forma de la curva (c): a_n será nula si (c) es una recta y no nula en los demás casos.

También ahora, como ya se dijo de las componentes radial y transversal de la velocidad, las componentes intrínsecas de la aceleración proporcionan más información física que sus componentes cartesianas.